تصحيح فرض ميكانيك النقطة المادية - سنة ثانية رياضيات
الدورة الثانية 2024 - 2025

س1 : أوجد في النقطة M شعاع واحدة المماس $\vec{e_t}$ على المنحنى المعين بشعاع الموضع
$\vec{OM} = \cos 4u\,\vec{i} - \sin 4u\,\vec{j}$
ثم عينه من أجل الزاوية
$u = \frac{\pi}{4}$

الحل : نشتق شعاع الموضع (1)
(2) $\vec{v} = -4\sin 4u\,\vec{i} - 4\cos 4u\,\vec{j}$
(3) $|\vec{v}| = \sqrt{16\sin^2 + 16\cos^2} = 4$ طويلة المشتق
(4) $\vec{e_t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\sin 4u\,\vec{i} - \cos 4u\,\vec{j}$ شعاع واحدة المماس
(5) $\vec{e_t}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.\vec{i} - (-1)\vec{j} = \vec{j}$: $u = \frac{\pi}{4}$ عند القيمة

س2 : في الإحداثيات الأسطوانية وبا ستخدام شعاع السرعة المعجلة استنتج عبارة شعاع التسارع

الحل : شعاع الموضع في الإحداثيات الأسطوانية :
(1) $\vec{OM}(r,\theta,z) = r\vec{e_r} + z\vec{k}$
أ شعاعة الواحدة : $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ ، $\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$ ، $\vec{k} = \vec{k}$
مشتقات شعاعة الواحدة :
$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial r} = \vec{0}$ ، $\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta} = \vec{e_\theta}$ ، $\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial r} = \vec{0}$ ، $\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial \theta} = -\vec{e_r}$ ، $\frac{\partial \vec{k}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = \vec{0}$
$\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial z} = \vec{0}$
$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial t} = \vec{0}$
مشتقات شعاع الموضع
$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e_r}$ ، $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e_\theta}$ ، $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} = \vec{k}$
لنحسب الآن شعاع السرعة المعجلة
$\vec{v}(M,t) = r'\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} + \theta'\cdot\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} + z'\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}$ (1)
(2) $\vec{\gamma} = r''\vec{e_r} + r\theta''\vec{e_\theta} + z''\vec{k}$

س3 : تتحرك نقطة مادية حركة دائرية منتظمة وفق معادلة الحركة $\theta = 6t$ وشعاع الموضع
(1) $\vec{OM} = 3\cos 6t\,\vec{i} + 3\sin 6t\,\vec{j}$
- أوجد شعاع السرعة وتاج السرعة العددية
- إذا علمت أن النقطة انطلقت من الموضع $M(3,0)$ ، عين شعاع الموضع والسرعة بعد مرور خمس ثوان.

الحل : - شعاع السرعة (2) $\vec{v} = -18\sin 6t\,\vec{i} + 18\cos 6t\,\vec{j}$ ، وتاج السرعة العددية (3) $|\vec{v}| = \sqrt{\ldots} = 18$
- بعد مرور خمس ثوان : $t = 5s$ ←
(4) $\vec{OM}(5) = 3\cos 30\,\vec{i} + 3\sin 30\,\vec{j}$
(5) $\vec{v}(5) = -18\cdot\sin 30\,\vec{i} + 18\cos 30\,\vec{j}$

تمرين (٤٠) : تتحرك نقطة مادية كتلتها $m = 2kg$ من شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = 3\cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j}$

١- أوجد شعاع كمية الحركة وشعاع العزم الحركي بالنسبة للنقطة O.

٢- أوجد تابع العزم الحركي بالنسبة للمحور (Δ) الموجه بالشعاع $\vec{e}_\Delta = \frac{3}{5}\vec{k}$

٣- أوجد تابع الطاقة الحركية للنقطة M ثم احسب قيمته من أجل اللحظتين $t = 2$ و $t = 3$.

٤- باستخدام نظرية الطاقة الحركية احسب العمل المنجز لانتقال M من الوضع المعين بـ $t = 2$ إلى الوضع المعين بـ $t = 3$.

الحل:

١- شعاع كمية الحركة: $\vec{P} = m\vec{v} = m\left[-6t\sin t^2\,\vec{i} + 6t\cos t^2\,\vec{j}\right] = -12\left[t\sin t^2\,\vec{i} - t\cos t^2\,\vec{j}\right]$

شعاع العزم الحركي بالنسبة لـ O:

$$\vec{M}_O(t) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3\cos t^2 & 3\sin t^2 & 0 \\ -12t\sin t^2 & 12t\cos t^2 & 0 \end{vmatrix} = 36t\left(\cos^2 t^2 + \sin^2 t^2\right)\vec{k} = 36t\,\vec{k}$$

٢- تابع العزم الحركي بالنسبة لـ O:

$$M_\Delta(t) = \vec{\Delta}\cdot\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) = \frac{3}{5} \times 36t = \frac{108t}{5}$$

٣- تابع الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}(2)\left[36t^2\sin^2 t^2 + 36t^2\cos^2 t^2\right] = 36t^2$$

من أجل $t = 2 \Rightarrow T(2) = 144\ Joul$

$t = 3 \Rightarrow T(3) = 324\ Joul$

٤- تطبيق نظرية الطاقة الحركية:

$$W = T_2 - T_1 = 324 - 144 = 180\ Joul$$

تمرين (٤٠) : تتحرك نقطة مادية حركة مستقيمية وتخضع لتأثير قوة محصلة تشتق من تابع القوى

$$U = 3t^2 - 2$$

عين مواضع توازن النقطة وادرس استقرار التوازن في هذا الموضع.

الحل: مواضع التوازن توافق القيم الحدية لتابع القوى.

القيم الحدية: نشتق: $\frac{dU}{dt} = 6t$

ينعدم المشتق عندما $t = 0$ وهو موضع التوازن

لتعيين نوع التوازن: ندرس إشارة المشتق الثاني $\frac{d^2U}{dt^2} = 6 > 0$

← المشتق الثاني موجب إذن انطلاقا تابع القوى لا أعلى

← التكوين عند $t = 0$ هي حدية صغرى والتوازن عندئذ خلق